ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский, В. В. Шунулина

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

В статье дается анализ характеристик колебаний двухмассовой механической системы. Приведена схема воздействия внешней силы на такую систему. Решается дифференциальное уравнение, описывающее колебания. Исследована зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты. Показано, при каких условиях в двухмассовой механической системе может наблюдаться резкое увеличение амплитуды.

Ключевые слова: колебания, двухмассовая механическая система, движение, период.

В механических системах можно наблюдать различные виды колебаний, которые определяются параметрами таких систем. Можно выделить представляющий интерес с точки зрения практики случай, когда в механической системе есть несколько соединенных между собой объектов, имеющих некоторые массы.

За счет того, что правильным образом подбираются параметры в колебательных системах есть возможности для снижения реакции системы на внешние периодические воздействия. Поэтому можно обозначить вопрос: существуют ли условия, в которых создается ситуация, в которой точка приложения переменной силы будет все время оставаться неподвижной? Можно увидеть таких условий, если в системе будет не менее двух степеней свободы [1, 2]. Проведем рассмотрение вынужденных колебаний в двухмассовой системе. В ней происходит приложение внешней силы $F_0 \sin \omega t$ к первому телу (рис. 1). Тогда можно записать дифференциальное уравнение, которое соответствует движению каждого из двух тел, таким образом

$$-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + F_0 \sin \omega t = m_1 \ddot{x}_1 ,$$

$$-k_2 (x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 . \qquad (1)$$

В этих уравнениях m_1 и m_2 являются массами объектов, k_1 и k_2 рассматриваются в виде жесткостей обеих пружин, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются смещениями объектов из состояния равновесия. Чтобы упростить анализ, можно пренебречь процессами трения. Можно записать общее стационарное решение для системы уравнений (1) в таком виде:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \qquad (2)$$

В этих выражениях A_1 и A_2 рассматриваются в виде амплитуд вынужденных колебаний каждого из объектов. Значения φ_1 и φ_2 показывают то, какой будет сдвиг фазы колебаний каждого из объектов [3, 4] относительно воздействующей внешней силы. Если проводить анализ поведения амплитуд, тогда можно ориентироваться на решения

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t), \; x_2 = A_2 \sin(\omega t). \qquad (3)$$

Если подставить (3) в (1), тогда получается система двух алгебраических уравнений по амплитудам колебаний

$$-A_1 m_1 \omega^2 + k_1 A_1 - k_2 (A_2 - A_1) = F_0 ,$$

$$-A_2 m_2 \omega^2 + k_2 (A_2 - A_1) = 0 . \qquad (4)$$

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: kozl99daryanik@yandex.ru.

Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, доктор техн. наук, профессор, e-mail: app@vivt.ru.

Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: shunul33vvv@yandex.ru.

Решая данную систему, мы можем определить

$$A_1 = \frac{F_0(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2},$$

$$A_2 = \frac{F_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}. \quad (5)$$

Видна зависимость значений амплитуд от того, какое будет значение частоты вынуждающей силы. На рисунке 2 приведены зависимости $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ при $\omega t = \pi/2$.

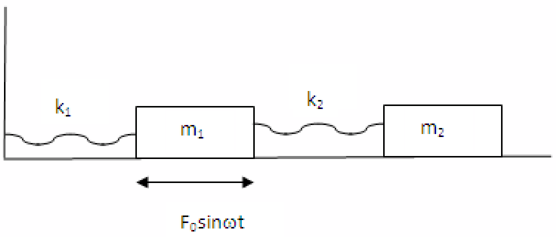

Рисунок 1. Схема воздействия внешней силы на двухмассовую систему

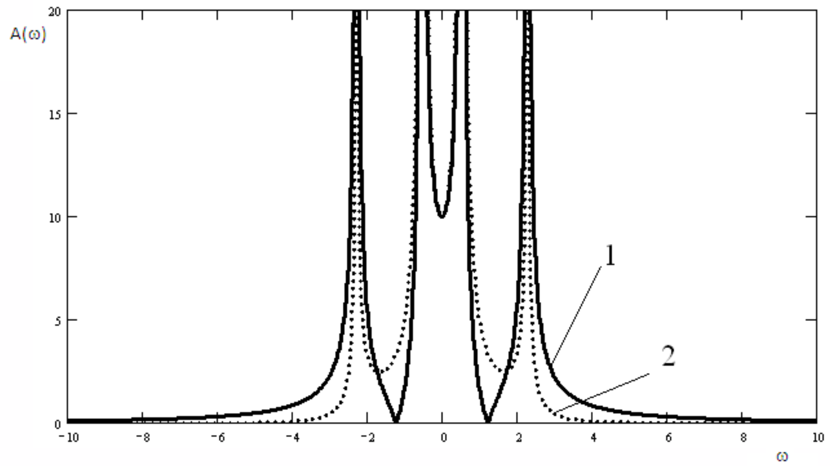

Рисунок 2. Иллюстрация зависимости *A(ω)*, F_0 = 10 Н, k_1 = 1 Н/м, k_2 = 3 Н/м, m_1 = 1 кг, m_2 = 2 кг, кривая 1 – *A1(ω)*; кривая 2 – *A2(ω)*

На рисунке 3 приведены зависимости $A_2(\omega)/A_1(\omega)$. Если в (5) положить равным нулю числитель, тогда $\omega = \omega_{рез} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$, при этом амплитуды будут следующие: $A_1 = 0$, $A_2 = -\frac{F_0}{k_2}$.

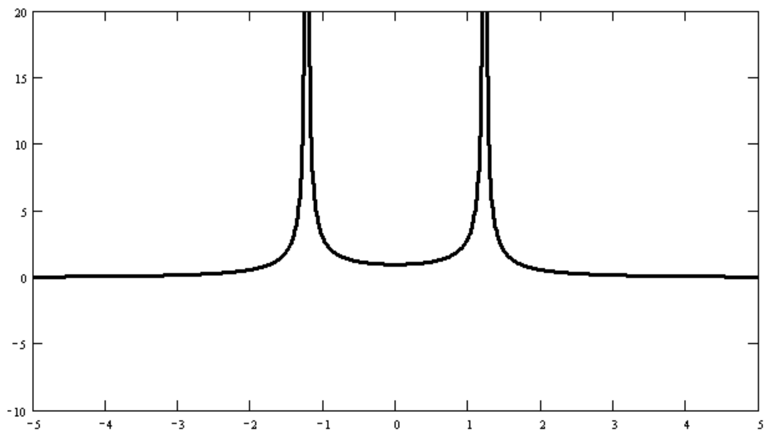

Рисунок 3. Иллюстрация зависимости $A_2(\omega)/A_1(\omega)$

На рисунке 4 показаны зависимости отношения амплитуд колебаний $A_2(\omega)/A_1(\omega)$ от отношения частот $\omega/\omega_{рез}$.

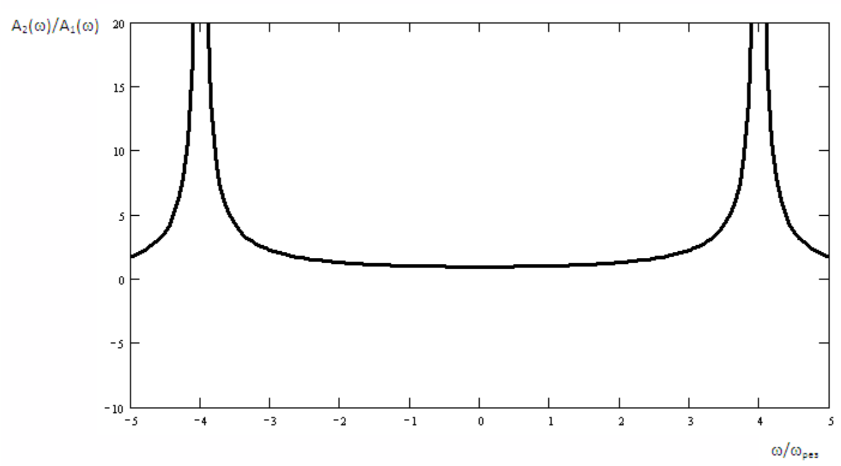

Рисунок 4. Иллюстрация зависимости $A_2(\omega)/A_1(\omega)$, F_0=10 Н, k_1=1 Н/м, k_2=3 Н/м, m_1 = 1 кг, m_2= 18 кг, кривая 1 – $A1(\omega)$; кривая 2 – $A2(\omega)$

Вывод. В работе проведено решение задачи механических колебаний в двухмассовой системе. Получены частотные зависимости амплитуд для заданных параметров воздействующей внешней силы.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сулоева Е.С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

2. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А. А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

4. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

THE STUDY OF OSCILLATIONS OF A TWO-MASS MECANICAL SYSTEM

© 2023 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, V. V. Shunulina

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)

The article analyzes the characteristics of oscillations of a two-mass mechanical system. A scheme of the influence of an external force on such a system is given. The differential equation describing the oscillations is solved. The dependence of the amplitude of forced gauges on the frequency is investigated. It is shown under what conditions in a two-mass mechanical system resonance can be observed.

Keywords: oscillations, two-mass mecanical system, motion, period.