УДК 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛЫ

© 2023 Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский, В. В. Шунулина

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

В статье дается анализ характеристик колебаний гармонического осциллятора под действием непериодической силы. Показано дифференциальное уравнение колебаний и его решение. Продемонстрировано условие отсутствия резонанса в механической системе. Приведены зависимости координаты от времени при условии воздействия внешней силы. Показана зависимость координаты от времени, если воздействует сила, которая представляет сумму нескольких гармонических колебаний с разными частотами.

Ключевые слова: колебания, гармонический осциллятор, движение, период.

Генераторы гармонических колебаний являются достаточно распространенными и применяются во многих искусственных технических системах. На практике представляет интерес анализ таких осцилляторов, которые возбуждаются при помощи внешней силы. В таких случаях появляются возможности для управления перераспределением энергии при колебаниях.

Рассмотрим особенности поведения гармонического осциллятора, если на него действует произвольная периодическая сила $F(t)$.

Тогда формируется уравнение, на основе которого будет описано движение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)\,. \quad (1)$$

Будем считать, что решение уравнения (1) представляется в следующем виде

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)\,. \quad (2)$$

В этом выражении $A(t)$ и $B(t)$ рассматриваются в виде неопределенных функций времени [1, 2]. Будем использовать переменную

$$\dot{x}(t) = -A(t)\omega\sin(\omega t) + B(t)\omega\cos(\omega t)\,. \quad (3)$$

То есть, требуется равенство нулю такого выражения, которое связывает $A(t)$ и $B(t)$

$$\dot{A}(t)\cos(\omega t) + \dot{B}(t)\sin(\omega t) = 0\,. \quad (4)$$

Проведя дифференцирование по времени $\dot{x}$, получим

$$\ddot{x}(t) = -\dot{A}\omega\sin(\omega t) - A\omega^2\cos(\omega t) + \\ + \dot{B}(t)\omega\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)\,. \quad (5)$$

Реализуем подстановку в уравнение (1). Как результат, получим

$$-\dot{A}\omega\sin(\omega t) + \dot{B}(t)\omega\cos(\omega t) = F(t)\,. \quad (6)$$

Проведем умножение такого уравнения на $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$, далее осуществим сложение. В результате получим, что

$$\dot{A}(t) = -\frac{1}{\omega}F(t)\sin(\omega t)\,,$$

$$\dot{B}(t) = \frac{1}{\omega}F(t)\cos(\omega t)\,. \quad (7)$$

Такая система первого порядка двух дифференциальных уравнений точным образом будет соответствовать уравнению второго порядка (1), которое было исходным. Существуют возможности для того, чтобы провести интегрирование полученной системы. Тогда сможем получить

$$A(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t F(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau\,,$$

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: kozl99daryanik@yandex.ru.
Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, доктор техн. наук, профессор, e-mail: app@vivt.ru.
Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: shunul33vvv@yandex.ru.

$$B(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t F(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau\,. \qquad (8)$$

Пусть, например,

$$F(t) = F_0\cos(\omega t)\,. \qquad (9)$$

Тогда

$$B(t) = \frac{F_0}{\omega}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right). \quad (10)$$

Если $t \to \infty$, то решение будет уходить в бесконечность. Если по мере того, как время будет расти будет обеспечиваться малость коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$, тогда не будет наблюдаться резонанс [3, 4]. То есть, условие отсутствия резонанса может быть записано следующим образом.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau = 0\,,$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau = 0\,. \quad (11)$$

С точки зрения математического описания это соотношение показывает, что в функции $F(t)$ не должны быть собственные функции нашей задачи. Если сила рассматривается как полигармоническая, то есть, мы ее представляем таким образом $F(t) = \sum_{i-1}^{\infty} F_{0i}\cos(\omega_i t)$ и будет совпадение одной из частот ω_i с собственной частотой осциллятора, тогда возникнет резонанс. Влияние составляющих других частот при этом будет несущественным.

На рисунке 1 приведены результаты зависимости x(t) в случае воздействия внешней силы $F(t) = \cos(\omega t)$ (кривая 1) и $F(t) = \cos(2\omega t)$ (кривая 2).

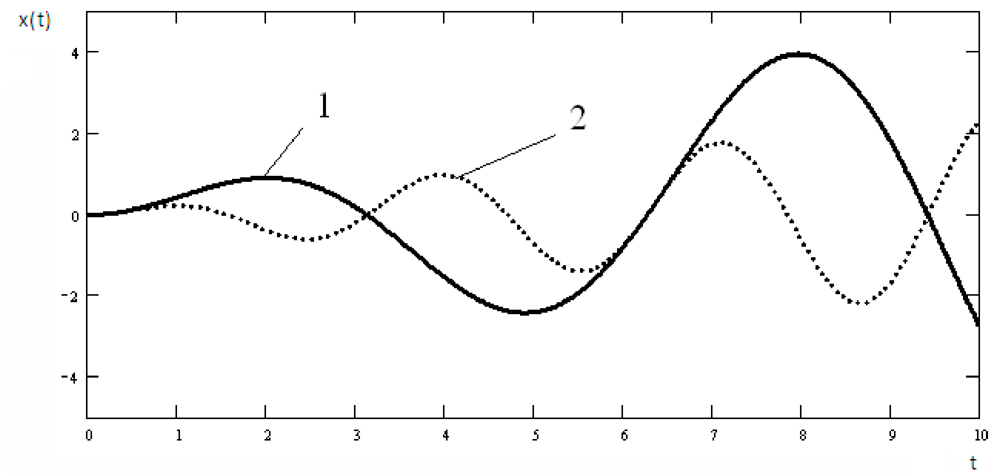

Рисунок 1. Иллюстрация зависимости x*(t),* при воздействии силы с одной частотой

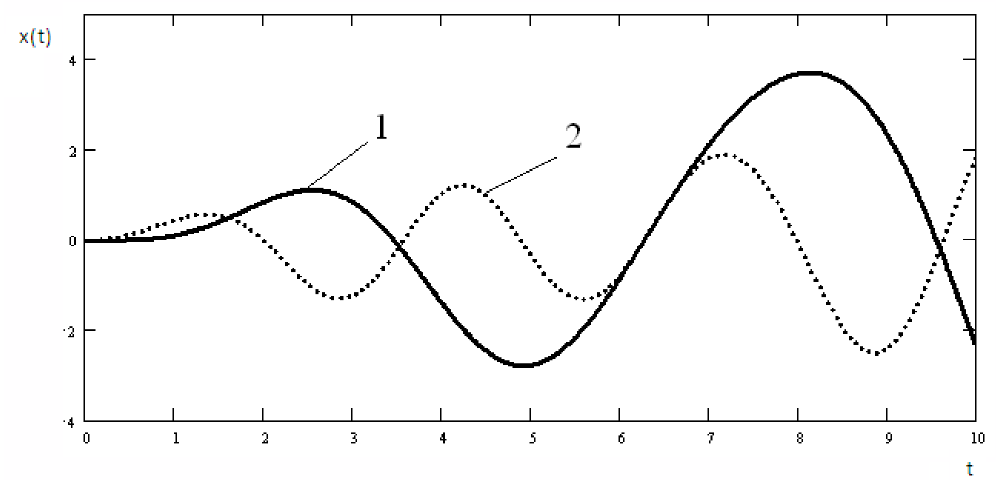

Рисунок 2. Иллюстрация зависимости x*(t),* при воздействии силы, представляющей сумму нескольких гармонических колебаний с разными частотами

На рисунке 2 приведены результаты зависимости x(t) в случае воздействия внешней силы $F(t)=cos(\omega t)-cos(2\omega t)$ (кривая 1) и $F(t)=cos(\omega t)+cos(2\omega t)-cos(3\omega t)$ (кривая 2).

Вывод. В работе проведено исследование колебаний гармонического осциллятора, когда на него воздействует внешняя непериодическая сила. Построены зависимости координаты осциллятора от времени в зависимости от разных условий внешнего воздействия.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сулоева Е. С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).
2. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А. А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).
3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
4. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

INVESTIGATION OF A HARMONIC OSCILLATOR UNDER THE ACTION OF A NON-PERIODIC FORCE

© 2023 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, V. V. Shunulina

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)

The article analyzes the characteristics of oscillations of the harmonic oscillator under the action of non-periodic force. The differential equation of oscillations and its solution are shown. The condition of the absence of resonance in the mechanical system is demonstrated. The coordinate dependencies on time are given, subject to the influence of an external force. The dependence of the coordinate on time is shown, if a force acts, which represents the sum of several harmonic oscillations with different frequencies.

Keywords: oscillations, harmonic oscillator, motion, period.