УДК 681.332

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ, ПОЗВОЛЯЮЩИХ УСКОРИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

© 2016 А. П. Преображенский

Воронежский институт высоких технологий

В работе проводится анализ некоторых машинно-ориентированных алгоритмов, дающих возможности существенным образом ускорить вычисления по сравнению с обычными подходами.

Ключевые слова: вычисления, оптимизация, компьютер, алгоритм, метод, функция.

В настоящее время при разработке технических объектов активно используются различные виды математического моделирования, которое во многих случаях позволяет отказаться от проведения реальных экспериментов.

Данный вид моделирования нацелен на широкое использование вычислительной техники.

При построении вычислительных алгоритмов и компьютерных программ необходимо минимизировать требуемое для вычислений время.

Особенно это важно при реализации задач проектирования, синтеза объектов, когда приходится рассматривать не одну, а множество реализаций функций, причем для вычисления даже одной реализации может понадобиться при использовании классических методов вычислений довольно значительное время.

В данной работе проводится анализ некоторых методов вычислений, которые могут оказаться полезными для большого класса технических задач.

Проблема, связанная с оценкой числа битовых операций, которое является достаточным для того, чтобы вычислить произведения двух m-значных чисел, или проблема, связанная с ростом функции сложности умножения, представляет собой нетривиальную проблему в теории быстрых вычислений.

А. А. Карацуба предложил новый метод умножения чисел, в котором оценка сложности значительно меньше, чем при обычном умножении [1].

Позднее ученый разработал метод БВЕ (быстрого вычисления Е-функций), на основе которого оказались возможны расчеты широкого класса трансцендентных функций [2].

Первым алгоритмом, связанным с быстрым умножением больших матриц, был алгоритм Фолькера Штрассена [3] в 1969. Основная идея данного алгоритма связана с тем, что происходит рекурсивное разбиение матрицы по блокам 2Х2.

Штрассеном было доказано, что можно производить некоммутативное перемножение матриц 2Х2 на основе семи умножений, в этой связи для каждого этапа рекурсии идет выполнение семи умножений вместо восьми.

Тогда асимптотическая сложность такого алгоритма будет $O(n^{2.81})$.

В качестве недостатка подобного метода можно отметить большую сложность при программировании, если сравнивать со стандартным алгоритмом, слабая численная устойчивость, а также при его реализации на компьютере потребуются большие объемы памяти.

Исследователями осуществлялось развитие алгоритма Штрассена, с точки зрения повышения его численной устойчивости, скорости работы.

В дальнейшем были созданы алгоритм Пана, алгоритм Бини, алгоритмы Шёнхаге, алгоритм Копперсмита-Винограда.

На сегодняшний день последний алгоритм считается самым быстрым, с точки зрения асимптотики, но его эффективность проявляется лишь на матрицах, имеющих очень большие размеры [4].

При численном интегрировании часто возникает задача повышения точности.

Если осуществлять приближение функции на основе одного полинома для всего отрезка интегрирования, то это во многих случаях определяет большие ошибки при оценках значений интегралов.

Преображенский Андрей Петрович – д. т. н., профессор ВИВТ АНОО ВО, e-mail: app@yandex.ru.

С целью уменьшения погрешности проводят разбиение отрезков интегрирования по частям и используют численные методы для того, чтобы получить оценку интеграла для каждой такой части.

Когда на практике наблюдается стремление числа разбиений к бесконечности, то будет стремление оценки интеграла к некоторому истинному значению, что является справедливым для аналитических функций, при использовании любых численных методов.

Мы можем получить метод прямоугольников, если подынтегральная функция будет заменена на константу.

В качестве константы может быть взято значение функции для любой из точек на отрезке.

Если провести аппроксимацию функции по каждому из частичных отрезков на основе прямой линии, которая будет проходить через конечные значения, тогда будет получен метод трапеций.

Когда используются три точки на отрезке интегрирования, то тогда мы можем сделать замену подынтегральной функции на основе параболы [5].

Метод Гаусса-Кронрода дает существенное увеличение точности при каждом разбиении интервала интегрирования [6].

В работе [7] проводится исследование возможности ускорения вычисления интеграла вероятностей.

Интеграл вероятностей (некоторые авторы называют его функцией ошибок) являющийся специальной функцией, а также функции, которые связаны с ним, достаточно часто используют в различных физических приложениях, базирующихся на теории вероятностей, математической физике [8].

Интеграл вероятностей можно аппроксимировать на основе различных полиномиальных приближений.

При этом разные ряды дают разную точность. Путем комбинирования разных аппроксимаций можно достичь большей скорости вычислений.

Использование численных методов оптимизации в прикладных физических задачах, во многих случаях приводит к необходимости вычисления производных.

В качестве альтернативы для метода конечных разностей может быть применен метод, направленный на быстрое автоматическое дифференцирование [9].

Авторами были рассмотрены общие формулы, связанные с быстрым дифференцированием, и они продемонстрировали, каким образом эти формулы можно использовать для того, чтобы производить дифференцирование функций многих переменных.

Существуют алгоритмы быстрого возведения в степень, которые связаны с возведением числа y в натуральную степень m, причем количество умножений должно быть как можно меньше, если сравнивать с обычным способом определения степени.

Основная идея данных алгоритмов связана с тем, что для того, чтобы возвести числа y в степень m, нет необходимости в перемножении числа y на себя m раз, можно воспользоваться перемножением уже вычисленными степенями [10].

В некоторых алгоритмах для того, чтобы достичь большей оптимизации опираются на такую информацию: при возведении в квадрат мы можем расчеты осуществить более быстрым образом, чем при обычном умножении вследствие того, что цифры для сомножителей будут повторяться.

Относительно недавно был разработан алгоритм быстрого извлечения квадратного корня [11].

В алгоритме рассматривается 32-битное число с плавающей запятой, и над ним производятся такие действия:

- происходит вычисление половины значения числа и то, что получается, сохраняется для последующего применения;
- проводится логический сдвиг вправо числа на один бит;
- осуществляется вычитание числа из так называемой «магической» константы $5f3759df_{16}$;
- как результат, получаем первое приближение по обратному квадратному корню для первичного числа;
- осуществляется вычисление одной итерации метода Ньютона для того, чтобы получить более точное приближение.

Таким образом, рассмотренные алгоритмы дают возможности для значительного ускорения вычислений при решении различных практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карацуба А. А. Умножение многозначных чисел на автоматах / А. А. Карацуба, Ю. Офман // Доклады Академии Наук СССР. – 1962. – Т. 145. – № 2. – 293-294 с.

2. Карацуба А. А. Быстрое вычисление трансцендентных функций / А. А. Карацуба // Проблемы передачи информации. – 1991. – Т. 27. – № 4. – С. 87-110.

3. Strassen V. Gaussian Elimination is not Optimal / V.Strassen // Numer. Math-Springer Science+Business Media, 1969. – Vol. 13, Iss. 4. – p. 354-356. – doi:10.1007/BF02165411

4. Don Coppersmith Matrix multiplication via arithmetic progressions. / Don Coppersmith, Shmuel Winograd // Journal of Symbolic Computation. – № 9. – 1990. – P. 251-280.

5. Самарский А. А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. / А. А. Самарский, А. В. Гулин // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

6. Калиткин Н. Н. Численные методы. / Н. Н. Калиткин. – М.: Питер, 2001. – 504 с.

7. Калиновский И. А. Быстрое вычисление интеграла вероятностей с произвольной точностью / И. А. Калиновский // IX Международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». – Томск, 24-27 апреля 2012 г. – С. 557-559.

8. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган // М.: Наука, 1979. – 832 с.

9. Айда-заде К. Р. Быстрое автоматическое дифференцирование на ЭВМ / К. Р. Айда-заде, Ю. Г. Евтушенко // Математическое моделирование. – Январь 1989. – Т. 1. – № 1. – С. 120-131.

10. Смарт Н. Алгоритмы возведения в степень / Н. Смарт // Криптография. Москва: Техносфера, 2005. – С. 287-292. – 528 с.

11.http://www2.mrbrklyn.com/resources/InvSqrt.pdf.

THE ANALYSIS OF ALGORITHMS FOR ACCELERATING COMPUTING IN TECHNICAL PROBLEMS

© 2016 A. P. Preobrazhenskiy

Voronezh Institute of high technologies

The paper deals with the analysis of some machine-oriented algorithms that enable to significantly speed up calculations compared to conventional approaches.

Keywords: computing, optimization, computer, algorithm, method, function.